INTEGRALSÄTZE, VEKTORFELDER, EINHEITEN

In der Elektrodynamik spielen Vektorfelder eine große Rolle, und insbesondere in Integralen. Außerdem gibt es eine Vielzahl von Einheitenkonventionen. Hier ein paar vertiefende Übungen dazu.

[H7] *Elektrisches Feld einer homogen geladenen Kugel* **[2 + 2 = 4 Punkte]**

Berechnen Sie die Rotation $(\mathrm{rot}\vec{E})^i = \varepsilon^{ijk}\partial_j E^k$ und die Divergenz $\mathrm{div}\vec{E} = \partial_i E^i$ des elektrischen Feldes einer homogen geladenen Kugel, die den Radius R hat und die Ladung Q trägt,

$$\vec{E}(\vec{x}) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi}\frac{Q}{R^3}\vec{x} & \text{falls} \quad r < R \\ \frac{1}{4\pi}\frac{Q}{r^2}\vec{e}_r & \text{falls} \quad r \geq R \end{cases} .$$

[H8] *Satz von Gauß* **[4 Punkte]**

Es seien E_x, E_y und E_z Funktionen auf dem Prisma $V = \{(x,y,z) : 0 \leq y \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq h\}$. Beim Volumenintegral

$$\int_V \mathrm{d}^3x \,\mathrm{div}\vec{E}$$

kann der erste Term der Divergenz ohne weiteres mit dem Hauptsatz der Integralrechnung über x, der zweite über y und der dritte über z integriert werden. Zeigen Sie, dass von den ersten beiden Termen das zweidimensionale Integral

$$\int_0^1 \mathrm{d}u \int_0^h \mathrm{d}z \Big(E_x(1,u,z) - E_x(u,u,z) + E_y(u,u,z) - E_y(u,0,z)\Big)$$

übrigbleibt (wie in der Präsenzübung ist der Name der ersten Integrationsvariablen willkürlich und irrelevant) und dass in diesem Beispiel die Volumenintegration über die Divergenz

$$\int_V \mathrm{d}^3x\,\mathrm{div}\vec{E} = \int_{\partial V} \mathrm{d}\vec{f}\cdot\vec{E}\,, \quad (\mathrm{d}\vec{f})^i = \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^k\,,$$

gleich dem Oberflächenintegral über die Randfläche von V ist.

[C1] *Umrechnung von Einheiten* **[8 Punkte]**

Das Standard-Einheitensystem ist das MKSA-System (die sogenannten SI-Einheiten), das die vier fundamentalen Einheiten Meter m, Kilogramm kg, Sekunde s und Ampere A kennt. In der Vorlesung verwenden wir die in der theoretischen Physik sehr viel praktischeren relativistischen Heaviside-Einheiten. Die vier fundamentalen Einheiten sind hier Meter m, Kilogramm kg, Lichtgeschwindigkeit c und die Permittivität des Vakuums ε_0. Die beiden letzten Größen werden dann gerne einfach gleich eins gesetzt, was viele Formeln sehr viel übersichtlicher macht. Jede dimensionsbehaftete Größe hat im MKSA-System eine Dimension der Form $\mathrm{m}^{\alpha_1}\mathrm{kg}^{\alpha_2}\mathrm{s}^{\alpha_3}\mathrm{A}^{\alpha_4}$, die wir mit $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ bezeichnen. Im Heaviside-System hat sie hingegen eine Dimension der Form $\mathrm{m}^{\beta_1}\mathrm{kg}^{\beta_2}c^{\beta_3}\varepsilon^{\beta_4}$, die wir mit $[\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4]$ bezeichnen.

(a) Zeigen Sie zunächst, dass jede Dimension $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ im MKSA-System umgerechnet ins Heaviside-System die Dimension

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4) = [\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4]n_\mathrm{s}^{\alpha_3}n_\mathrm{A}^{\alpha_4} = [\alpha_1+\alpha_3-\frac{\alpha_4}{2}, \alpha_2+\frac{\alpha_4}{2}, 2\alpha_4-\alpha_3, \frac{\alpha_4}{2}]n_\mathrm{s}^{\alpha_3}n_\mathrm{A}^{\alpha_4}$$

besitzt und geben Sie die numerischen Faktoren n_s und n_A in der maximal physikalisch sinnvollen Genauigkeit an.

(b) Schreiben Sie nun ein Programm, das als Eingabe die folgenden Einheiten-Namen und die zugehörigen Einheiten-Zeichen akzeptiert, und die zugehörigen Dimensionen im MKSA- und im Heaviside-System ausgibt:
- Meter (m),
- Kilogramm (kg),
- Sekunde (s),
- Ampere (A),
- Newton (N),
- Pascal (Pa),
- Joule (J),
- Watt (W),
- Coulomb (C),
- Volt (V),
- Weber (Wb),
- Henry (H),
- Siemens (S),
- Ohm (Ω),
- Hertz (Hz),
- Tesla (T),
- Farad (F),
- Becquerel (Bq),
- Sievert (Sv).

Ferner soll das Programm auch die folgenden physikalischen Konstanten und Größen in beiden Systemen ausgeben können:
- $\hbar$ (reduziertes Planksches Wirkungsquantum),
- c (Lichtgeschwindigkeit),
- e (Elementarladung),
- ε_0 (Permittivität des Vakuums),
- eV (Elektronenvolt).

(c) Warum ist der Ohmsche Widerstand für die Metrologen, also für die Wissenschaftler, die sich mit Maßsystemen und der Bestimmung von Naturkonstanten beschäftigen, so wichtig, vor allem seit der Entdeckung des Quanten-Hall-Effekts, der einen Elementar-Widerstand definiert?

(d) Geben Sie die Feinstrukturkonstante $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c}$ in beiden Systemen an. Was fällt Ihnen auf?

(e) *Freiwillige Zusatzaufgabe*: Wer will, kann das Programm auch noch auf das Gauss-System, auch cgs-System genannt, erweitern.

Hinweise: Dies ist die erste Computerübung. Sie haben für die Bearbeitung drei Wochen Zeit. Abgabe ist also spätestens am 18. Mai 2012. Wir verzichten in diesem Semester darauf, dass jeder die Computerübung vorführen muss. Ihre Lösung sollte aus einem dokumentierten Programm und einer durch dieses Programm erstellten Tabelle bestehen. Es ist ausdrücklich erwünscht, dass Sie im Internet recherchieren, um numerische Werte und die Definitionen der physikalischen Größen zu finden.

HINWEIS

Bitte geben Sie auf Ihren abgegebenen Lösungen immer Name, Vorname, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an!